平成 24 年度　　　卒 業 研 究 論 文 要 旨
教育研究分野　情報数理学　　　2121003　一本嶋　瞳

2 重非心 F 分布の確率パーセント点算出法

1　はじめに

2 重非心 F 分布は，タグチメソッドの SN 比の分布として知られるようになってきた．この分布の密度関数は無限級数和を含む複雑な式で与えられ，数値積分も困難なことから，そのパーセント点を知る方法として多くの近似法が研究された．本論文では，2 重非心 F 分布のパーセント点をモンテカルロ法で求めるにあたり，鳥越は Mathematica，堀井らは統計解析ソフト R を用いていたのに対し，C 言語で構築する。その結果，計算のプロセスに介入し高速化を指向する工夫をとりいれる方法を提案する．いくつかの数値例で提案法の有効性を示す.

2　2 重非心 F 分布の性質

自由度 ν，非心度 δ の非心カイ 2 乗分布に従う確率変数を $\chi^2_{\nu,\delta}$ とするとき，2 組のパラメータ $(\nu_1, \delta_1), (\nu_2, \delta_2)$ による独立な非心カイ 2 乗変数の比

$$F_{\nu_1,\nu_2,\delta_1,\delta_2} = \frac{\chi^2_{\nu_1,\delta_1}/\nu_1}{\chi^2_{\nu_2,\delta_2}/\nu_2} \tag{1}$$

の分布を 2 重非心 F 分布という.

3　モンテカルロ法を用いた推定

2 重非心 F 分布の乱数を n 個発生させ，標準ランクによるパーセント点の推定を行い，この m 回の試行の平均をもってパーセント点の最終推定値とする．この方法をプログラムとして実現する方法を以下に記す.

1. 非心カイ 2 乗乱数発生関数をつくる
   与えられた自由度 ν と，非心度 δ に対して $N(\sqrt{\delta/\nu}, 1)$ に従う正規乱数を ν 個発生させ，その 2 乗和を返す.
2. 2 重非心 F 乱数発生関数をつくる
   与えられた自由度 ν_1, ν_2 と，非心度 δ_1, δ_2 に対して 1. での非心カイ 2 乗乱数を用いて (1) 式による 2 重非心 F 分布乱数を返す.
3. 順序統計量を計算
   指定下側下側 α に対して，$n\alpha$ が整数になるものとする．2. の乱数を n 個発生させ，ソーティングを行い $n\alpha$ 番目に小さいデータを返す.
4. 平均を計算
   3. で得られたデータについて m 回の平均を出す.

以上の方法を従来法と呼ぶことにする，

4　提案法

本研究は，非心カイ 2 乗乱数発生関数の改良を行った．$N(\mu_i, 1)$ に従う 2 個の乱数を，Box-Muller 法

$$\begin{cases} x_{(i)} = \sqrt{-2\log U}\sin(2\pi V) + \mu_{(i)} \\ x_{(i+1)} = \sqrt{-2\log U}\cos(2\pi V) + \mu_{(i+1)} \end{cases} \tag{2}$$

で与える.

(a) $\nu = 1$ のときは，従来法と同様.
(b) $\nu = 2$ のときも従来法と同様であるが，さらに，2 組の乱数の 2 乗和の三角関数を合成して，$\delta - 2\log U_{(\nu/2)} + 2\sqrt{-2\delta\log U_{(\nu/2)}}\sin\left(2\pi V_{(\nu/2)} + \frac{\pi}{4}\right)$ と式変形する.
(c) ν が 3 以上の奇数のときは，$\mu_1 = \cdots = \mu_{\nu-1} = 0,\ \mu_\nu = \sqrt{\delta}$ とする．$N(0,1)$ 乱数の 2 乗和は，$-2\log(U_1 \cdot U_2 \cdots)$ まで式変形する.
(d) ν が 4 以上の偶数のときは，$\mu_1 = \cdots = \mu_{\nu-2} = 0,\quad \mu_{\nu-1} = \mu_\nu = \sqrt{\delta/2}$ とする．(c) と同様，$N(0,1)$ 乱数の 2 乗和は，$-2\log(U_1 \cdot U_2 \cdots)$ まで式変形する.

5　数値検証

$\alpha = 95\%, n = 100000, m = 100$ とした，各パラメータに対する従来法と改良法の計算時間を表 1 に示す.

表 1: 従来法と提案法の計算時間の比較

ν_1	ν_2	δ_1	δ_2	従来法 [sec]	提案法 [sec]	従/提
5	10	5	5	25.61	9.51	2.69
5	20	5	5	39.79	10.92	3.64
5	30	5	5	54.02	12.36	4.37
10	10	10	10	32.39	9.64	3.36
10	20	10	10	46.91	11.32	4.14
10	30	10	10	61.14	12.77	4.79
20	10	5	10	46.88	11.33	4.14
20	20	5	10	60.84	12.52	4.86
20	30	5	10	75.32	14.27	5.28

6　結論

本研究では，モンテカルロ法を用いた 2 重非心 F 分布の確率パーセント点を推定した．鳥越や堀井らは，Mathematica や統計解析ソフト R に既存の関数を用いて正規乱数を発生させているのに対し，本研究では Box-Muller 法を用いて乱数を発生させた．その際，全ての乱数に均等に非心度を負担させるという一般的な考え方ではなく，非心度の負担を敢えて偏らせるというひと工夫を取り入れることにより，プログラム上での計算回数を減らすことに成功した．これにより，非心度を均等に負担させたときと比較すると，約 1/4 の計算時間でパーセント点を得ている．また，堀井らと同様な条件 $n = 10000, m = 10000$ とし，堀井らの研究と本研究の提案法での時間の比較を行った．堀井らの研究では約 10 分かかっていたのに対し，本研究の提案法では 2 分程度で結果が得られた．更に，本研究で得た実際のパーセント点の値は，鳥越や堀井らが得た値と大きな違いは見られない．これらのことから，提案法での確率パーセント点推定の高速化が実現したと言える.

参考文献

[1] 一本嶋瞳，金川明弘 : 2 重非心 F 分布のパーセント点算出法について，平成 24 年度 (第 63 回) 電気・情報関連学会中国支部連合大会，pp.315-316，2012