

## エントロピー最大化基準を用いた ポートフォリオ最適化問題の一解法

### 1 はじめに

資本のサイクルを考えたとき、株の活発的な購買は、社会経済の活発化に不可欠な行為である。そして、株取引のリターンを期待しながらも、リスクを最小にしたいという問題の解決を試みたのがマーコヴィッツのポートフォリオ最適化問題である。しかし、マーコヴィッツの理論を実用するにあたって、株式銘柄の投資収益率の無相関性を保証できない点があるので、各産業別に十分均等に株式の選択がなされているのかの尺度を考えることによりこの問題の解決を試みた。具体的にはエントロピーの概念を用いて各銘柄選択率をなるべく等しくなるように操作を加えた新しい平均・分散アプローチを示し、その有効性を検証する。

### 2 ポートフォリオ最適化問題

市場に出回る株式などの証券に投資することを証券投資という。投資目的には、全資金を一つの証券に全額投資しても良いが、様々な証券に分散して投資する方が収益率が同じ場合にリスクを小さくできる。それには多くの証券の中からどの証券を選択し、かつそれをどのように組合せて投資すれば良いかという問題が生じる。これをポートフォリオ最適化問題と呼ぶ。そして、証券の組合せは無相関性なほどリスクが小さくなり良いとされている。

このポートフォリオ最適化問題の解を評価する方法に情報レシオがある。情報レシオとは、ベンチマーク指数に対するポートフォリオのパフォーマンスを評価する指標であり、収益率の平均を  $\bar{E}$ 、分散を  $V$  とすると、情報レシオ  $IR$  は以下の式で表される。

$$IR = \frac{\bar{E}}{\sqrt{V}}$$

### 3 エントロピー

シャノンが提案した情報量の平均のことであり、不確かさの度合いを表すときに用いられる。エントロピー  $H = -\sum_{i=1}^N p_i \log p_i$  を制約条件  $\sum_{i=1}^N p_i = 1$  の下で最大化すると、一様分布  $p_1 = p_2 = \dots = p_N = \frac{1}{N}$  という結論を得るので、一様性の尺度として用いられる [2]。

### 4 提案手法

本論文では、ポートフォリオの優秀さを表す指標として情報レシオを採用し、情報レシオにエントロピー最大化基準を付加することにより、解の無相関性を高める手法を提案する。 $N$  銘柄の証券から  $S$  銘柄選んだときの各産業が占める割合を  $\{p_1, p_2, \dots, p_S\}$  とすると目的関数は以下の式

になる。

$$\text{目的関数: } \sum_{n=1}^S IR_n \times \left( -\sum_{n=1}^S p_n \log p_n \right) \rightarrow \max$$

ここで  $IR_n$  とは第  $n$  期の情報レシオである

### 5 数値実験

実際の株価データで検証する前に、仮のサンプルデータで提案手法を検証した。銘柄数 25、産業数 5、期間 5、選択数 5 という条件の元で実験を行い、比較対象はエントロピー最大化基準を付加していない情報レシオを用いた。また、簡略化のために産業ごとの銘柄数は同じとする。産業は仮に A, B, C, D とおいた。

結果を表 1 に示す。視覚的に分かりやすくするためにバイナリ表現を用いた。0 が非選択、1 が選択である。

表 1 から、提案手法では、選択された銘柄の産業が分散されており産業別の無相関性が高くなっており、均等な株式の選択がなされている。

表 1: 実験結果

	産業 A	産業 B	産業 C	産業 D	産業 E
既存手法	00000	00000	11111	00000	00000
提案手法	00000	00001	00110	10000	00001

### 6 おわりに

本論文では、エントロピーをポートフォリオ最適化問題の評価法として適用させた結果、無相関に近い解を導くことができ、その有効性を示せた。本論文で扱った銘柄数は 25 と比較的少ない。よって悉皆列挙による最適解探索が可能であった。本論文でのポートフォリオ問題への更なる適用を考えたとき、大きい銘柄数による求解が必要になる。そのためのアルゴリズムの探求が不可欠である。

### 参考文献

- [1] Markowitz, H.: "Portfolio Selection", Journal of Finance, Vol. 7, pp.77-91, 1952.
- [2] Jaynes, E.T.: "Information Theory and Statistical Mechanics," Phys.Rev., Vol. 106, pp.620-630,1957.
- [3] 津野義道: ポートフォリオ選択論入門-高収益・低リスク株式分散投資法-, 共立出版株式会社, 1991.