平成 19 年度　　修　士　論　文　要　旨

教育研究分野　情報数理学　　　6318011 孫 暁霞

タグチの損失関数に基づく平面同時管理図の構成

1　はじめに

品質管理ツールである管理図は Shewhart が $\bar{x}-R$ 管理図を提案して以来, 工程の管理に中心的な役割を果してきた. 大隅昇は 1979 年に新しい管理図として平面型管理図を提案した. これは, 従来別々に管理していた工程平均とばらつきを同一平面上で管理しようと言うものである. 一方, 品質管理の現場では田口玄一氏が提唱する品質工学, いわゆるタグチメソッドが注目されている. 本論文はタグチメソッドの中核をなす損失関数の理論を用いて, 打点統計量に推定損失量を打点する新しい平面同時管理図を提案する. またサンカランの近似を用いた確率限界法による管理図設計法を提案する.

2　平面管理図

QC 七つ道具の一つとしての管理図とは, 郡内変動を基準として統計的に合理的に決められた管理限界線の入った図のことであり, これを使って製品の品質を管理する方法が管理図法である.

管理図は $\overline{E(T)}$ 中心線（CL）, $\overline{E(T)}+\overline{3\sigma(T)}$ 上部管理限界線（UCL）と $\overline{E(T)}-\overline{3\sigma(T)}$ 下部管理限界線（LCL）の３本の線を引く. 生産状況が点の動きを表される. 点が CL 近傍に多く集中し, すべて上下部管理限界線内に入っていれば, 管理図は管理状態にあると判断し, さもなければ, 工程は安定でなく, 何らかのつきとめ得る原因があると考えて調査, 検討するなどアクションをとる. 中心から上下部管理限界線までの距離は $\pm\overline{3\sigma(T)}$ により定めるのでこの管理図法を３シグマ法と呼ぶ.

近年提案された平面管理図を紹介する. この種の管理図は, 初めに大隅によって紹介された. この管理図に, 生産工程の状態を表す連続点($\bar{x}$,s)を２次元平面上に打点する. ここで, $\bar{x}$ は標本平均であり, s は標本標準偏差である, すなわち：

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i,\qquad s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2 \tag{1}$$

n はサンプル・サイズを示す. 管理限界は円によって与えられている. この管理図を図１に表す.

この図の中, 領域Ａは「処置は必要なし, 管理状態にある」, 領域Ｂは「異常があるが, 修正は容易」, 領域Ｃは「精度にかかわる異常であるからやや修正が難しい, コスト高となる」. 領域Ｄは「厳しく原因を調べ, 要因を根本的に分析する必要がある」ということを表している. しかし, 大隅の同時管理図には, いくつかの欠陥がある. そのひとつに, この管理図は Type-I エラーの確率を見積もることができないことが挙げられる.

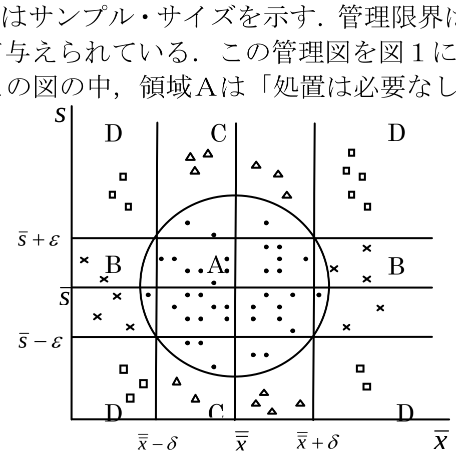

図１　大隅の提案した平面同時管理図

以上の問題から, Kullback-Leibler(KL)情報量に基づく同時管理図が提案された. その管理限界線の概形は図２のようになる.

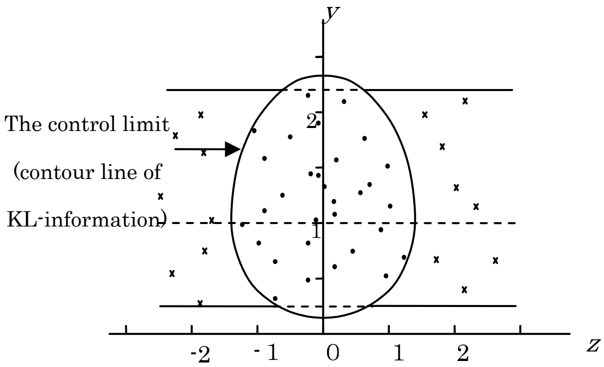

図２　KL 情報量に基づく同時管理図

サンプル n の KL 情報量の推定量 $\hat{I}\ (g:f)$ は次で与えられる.

$$n\hat{I}(g:f)=\frac{n}{2}\left\{\log\frac{\sigma_0^2}{s^2}-1+\frac{s^2}{\sigma_0^2}+\frac{\left(\bar{x}-\mu_0\right)^2}{\sigma_o^2}\right\} \tag{2}$$

$$y=\frac{s}{\sigma_0},\quad z=\frac{\bar{x}-\mu_0}{\sigma_0} \tag{3}$$

とする, 式(2)より,

$$n\hat{I}(g:f)=\frac{n}{2}\left(-\log y^2-1+y^2+z^2\right)\leq I(\alpha:n) \tag{4}$$

になら, この工程は管理状態にあり, そうでなければ管理状態にないと判断する. ＫＬ情報量が分布間の距離尺度として妥当であると判断されたら, この管理限界カーブは正確な Type-I エラーと最適な管理ラインを与えることができる. しかし, 正確な卵形の曲線を描きにくい.

3　提案の管理図

Tagchi は品質評価の概念として, 従来の不良率による品質評価と別に, 製品品質の理想品質からのずれによる損失に基づく関数による品質評価を提案している. 具体的に, Tagchi は製品品質 x とその製品品質の理想値（目標値）T との差の２乗を用いて, 製品品質 x による損失関数を $k\ (x-T)^2$ により与えている. ここに, k は定数であり, 製品品質 x が平均μ, 標準偏差σの正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うとき, 損失関数の期待値 $Loss$ が

$$Loss=k\left\{\sigma^2+\left(\mu-T\right)^2\right\} \tag{5}$$

として与えられる. μ と σ^2 が未知で, サイズ n のサ

ンプルが存在する場合，式(5)で与えられる損失 L の推定量$\hat{L}$を

$$\hat{L} = s^2 + (\bar{x} - T)^2 \qquad (6)$$

で与える．ここで，$\bar{x}$ と s^2 は式(1)のように与える．

統計量τを

$$\tau = \frac{n\hat{L}}{\sigma^2} = \frac{ns^2}{\sigma^2} + \frac{n(\bar{x}-T)^2}{\sigma^2} \qquad (7)$$

のように定義する．損失関数の期待値 *Loss* により，k は定数であるから，式(5)を k で除し，

$$\tau^2 = \sigma^2 + (\mu - T)^2 \qquad (8)$$

ように表す．式(8)で与えられる損失τ^2の推定量$\hat{\tau}^2$を

$$\hat{\tau}^2 = s^2 + (\bar{x} - T)^2 \qquad (9)$$

与える．ただし，式(9)において$\bar{x}$，s^2 は，式(1)で与える．そうすると判定ルールは $\hat{\tau}^2 = s^2 + (\bar{x} - T)^2 \le R^2$ なら安定，そうでなければ不安定ということになる．図 3 は，提案の管理図の概形である．

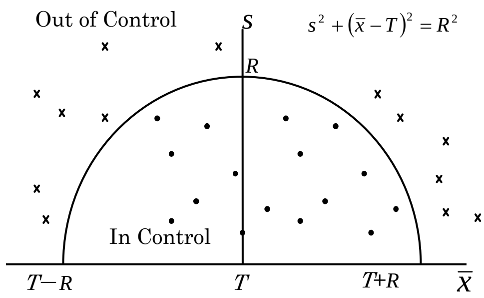

図 3 提案の平面同時管理図

式(7)の右辺第 1 項は自由度 n－1 の中心カイ 2 乗分布に従い，第 2 項は自由度 1，非心度$n(\mu-T)^2/\sigma^2$の非心カイ 2 乗分布に従う．これより，式(7)の統計量τは自由度 n，非心度$n(\mu-T)^2/\sigma^2$の非心カイ 2 乗分布に従うことがわかるよって、Type-I エラーがαとなる管理図の半径は

$$R = \sigma\sqrt{\frac{\chi^2(n, n\zeta^2, \alpha)}{n}} \qquad (10)$$

で与えられる．ここで，$\chi^2(n, n\zeta^2, \alpha)$ は，自由度 n，非心度$n\zeta^2$のカイ 2 乗分布の 100α パーセント点である．次にこの非心カイ 2 乗分布のパーセント点を求める方法について述べる．

非心カイ 2 乗分布は，x_i を平均μ_i，分散 1 の正規分布に従う互いに独立な確率変数とすると，自由度をνとして

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{\nu} x_i^2 \qquad (11)$$

の分布であり，その密度関数は

$$f(\chi^2, \nu, \delta) = \frac{e^{-\frac{\delta}{2}}}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\left(\frac{\delta}{2}\right)^k \frac{e^{-\frac{\chi^2}{2}}}{\Gamma(k+\nu/2)}\left(\frac{\chi^2}{2}\right)^{\frac{\nu+2k}{2}-1} \qquad (12)$$

で与えられる．ここに，δ は非心度と呼ばれ

$$\delta = \sum_{i=1}^{\nu} \mu_i^2 \qquad (13)$$

である．式(12)は無限級数の和を含む複雑な形式をしており，この積分に基づく確率計算は非常に厄介である．それゆえ簡便な近似法が研究された．2 乗分布を，定数 C× 自由度 ϕ の中心カイ 2 乗分布で近似することを考える．この両者の第 1，第 2 モーメントを等置すると

$$C = (\nu + 2\delta)/(\nu + \delta) \quad \phi = (\nu + \delta)^2/(\nu + 2\delta) \qquad (14)$$

が得られる．これがパトナイク近似であり，現在この種の研究において最も多用されている．しかし，この近似を使おうとすると，小数自由度のカイ 2 乗分布のパーセント点は必要となり，これは通常の数値表に載っていない．小数自由度のカイ 2 乗分布のパーセント点を求める方法として線形補間するか，密度関数を数値積分するなど面倒な手続が必要となる．一方，サンカランは，自由度ν，非心度δの非心カイ 2 乗分布の上側 100α%点 $\chi^2_\alpha(\nu,\delta)$を以下の近似式で与えた．

$$\chi^2_\alpha(\nu,\delta) = (\nu+\delta)(\mu^* + \sigma^* u_\alpha)^{1/h} \qquad (15)$$

ここに

$$h = 1 - \frac{2}{3}\frac{(\nu+\delta)(\nu+3\delta)}{(\nu+2\delta)^2} \qquad (16)$$

$$\mu^* = 1 + h(h-1)\frac{(\nu+2\delta)}{(\nu+\delta)^2} + h(h-1)(h-2)(1-3h)\frac{(\nu+2\delta)^2}{2(\nu+\delta)^4} \qquad (17)$$

$$\sigma^{*2} = h^2\frac{2(\nu+2\delta)}{(\nu+\delta)^2} + h^2(h-1)(1-3h)\frac{2(\nu+2\delta)^2}{(\nu+\delta)^4} \qquad (19)$$

である．

4 提案の管理図の経済的運用法

提案した管理図は総期待管理コスト C を用いて，サンプル・サイズを経済的な運用サンプル・サイズとして提案した管理図の運用法の最適性を評価することを行う．

5 結論

本研究で，提案した管理図を設計するのにパトナイク近似の代わりにサンカラン近似を使用するのを行った．パトナイク近似は小数自由度のカイ 2 乗分布のパーセント点けを必要としている．これに反して，サンカラン近似は標準正規分布のパーセント点を必要とするだけである．一般に，正規分布表はカイ 2 乗分布表よりもっと多い内容が提供される．その上，任意の N (0, 1)のパーセント点は Hastings-Toda の近似公式を用いて得られる．コンピュータの発展につれて，コンピュータのディスプレイ上でモニターが可能である平面型管理図は紙の上に描く従来の管理図の代わりにするのが重要になる．

参考文献

[1] Sun X., Kanzaki N., Kanagawa A., Construction of Control Charts Based on the Concept of Taguchi Method, Proc. of ICIM2006, pp. 28-32, 2006

[2] 金川明弘，孫 暁霞，タグチ損失量の近似分布とその応用，日本経営工学会平成 19 年度春季大会予稿集，pp. 132-133，2007