

## 順序ラベルによる PQ-tree の拡張

### 1 はじめに

問題の解が順列で与えられるものの中には、あらかじめ与えられた「先行順序を満たすもの」という条件が加わることが多々ある。例えば、配送問題において何らかの制約で  $b$  より  $a$  を先に届ける必要がある場合や、JOB スケジューリング問題において仕事  $J_i$  より  $J_k$  を先に行わなければならない場合などが挙げられる。これらは PQ-tree の応用として適切であると考えられるが、まだ有効な応用方法は考えられていない。

そこで本論文では、K. S. Booth らが考案した順列の集合を表現する PQ-tree に「あらかじめ与えられた幾つかの要素間に順列の中で現われる順番に制約がある」という条件を加えた場合に、各ノードにおいて同じ親を持つ子ども同士の間をラベルを用いて表現する方法を提案する。

### 2 PQ-tree

PQ-tree とは、非終端記号である  $P$ -node (図 1) と  $Q$ -node (図 2)、終端記号である葉で構成された順列を表現するデータ構造である。 $P$ -node は  $k$  個の子を任意に並べ替えることで  $k!$  通りの順列を表現することができる。 $Q$ -node は  $k$  個の子を左右いずれか一方から順に並べた 2 通りを表現することができる。

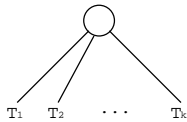


図 1:  $P$ -node .

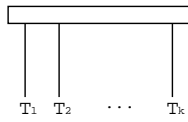


図 2:  $Q$ -node .

PQ-tree を用いて表現可能な順列の集合は、葉に対応する要素の集合  $U$  とその部分集合  $S_1, \dots, S_m$  が与えられたとき、 $U$  の要素で表現可能な順列の中で「各  $S_i$  に属する要素は相連続している」という条件を満たす順列の集合である。もちろん任意の順列の集合に対してそれを表現する PQ-tree があるとは限らない。存在しなければ空木となる。

集合  $\{S_i\}$  が与えられたとき、 $|U| = n$  とすると、各  $S_i$  の要素が連続するように PQ-tree を  $O(n)$  で生成するアルゴリズムが存在する [1]。

### 3 先行順序

先行順序とは、順列の中で  $a_i$  が  $a_j$  よりも先に現われなければならないという制約であり、その関係を矢印を用いて  $a_i \rightarrow a_j$  と表す。これらは先行制約と呼ばれ、PQ-tree 生成時にあらかじめ先行制約の集合  $C$  が与えられるものとする。

$C$  に現れる  $U$  の要素を頂点とし、 $\{a_i \rightarrow a_j\} \in C$  のとき  $(a_i, a_j)$  なる辺をもつ有向グラフを作る。この有向グラフを  $G_c = (V_c, E_c)$  とする。

### 4 先行順序を満たす順列を表現する PQ-tree の存在判定

PQ-tree がその生成過程においてすべての先行制約を満たしているとは限らない。そこで磯谷らが提案したアルゴリズムを用いて条件を満たすか否かを判定する。Booth らの PQ-tree の生成アルゴリズムの中心となっているのは操作は、9 個の template による PQ-tree の変形規則を用いることである。磯谷らのアルゴリズムは、各 template ごとに先行制約を満たす条件を用いることにより行われる。 $|U|=n, |C|=k$  とすると時間計算量は  $O(kn)$  である。

### 5 順序ラベル

順序ラベルは、 $P$ -node、 $Q$ -node それぞれに対して別々のラベルを次のように付加する。

$P$ -node の直接の子供にあたる各部分木  $P_i$  に含まれる要素の集合を  $S_{P_i}$  とする。すべての  $S_{P_i}$  により縮約したグラフを  $G_P = (V_P, E_P)$  とする。その中で循環が存在してはならない。もし存在すれば空木となる。

$P$ -node に含まれる要素の順序関係を、縮約したグラフ  $G_P$  において最小の色で彩色できるように先行制約を連結し、 $P$ -node と子供を繋ぐ枝にラベルを付ける。説明を容易にするため連結した先行制約のグループを色、その中における順位を数字で表す。これを  $P$ -node の順序ラベルと呼ぶ。ラベリングの時間計算量は  $|U|=n$  として  $O(n^2)$  である。また、次のような性質を持っている。

1. 無色の枝は、すべての要素と交換可能。
2. 同じ色の中で、順序関係があるものは交換不可。
3. 同じ色の中で、順位が同じものは交換可能。
4. 2 つの異なる色同士は交換可能。ただし、推移により順序関係が決まる場合は除く。

$Q$ -node において左から右、右から左という 2 通りの順序があるが、 $Q$ -node に属する要素同士の順序関係より 1 通りに定められることがある。これを矢印記号を用いて表し、 $Q$ -node の順序ラベルと呼ぶ。これは磯谷らの判定アルゴリズムにより付加される。

### 6 おわりに

本論文では、順序ラベルを付加することにより、PQ-tree が表現する順列の集合から条件を満たさない余分な順列を排除する方法を提案した。今後の課題としては、順序ラベル付き PQ-tree を用いて組合せ最適化問題などに適応させることが挙げられる。

### 参考文献

- [1] K. S. Booth and G. S. Lueker, "Testing for consecutive ones property, interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms," *J. Computer and System Sciences*, 1976.