平成18年度　　　　修 士 論 文 発 表 要 旨

教育研究分野　情報数理学　　　　氏名　西本吏志

「強さ」に対する定量的評価法とその応用

1　序論

多くの要素が複雑に絡み合う中で，それを様々な角度から分析することが現代社会では求められている．その分析の一つとして関係性のある要素のもつ強弱関係を見極め，それぞれの要素の「強さ」を求めるという要求が存在する [1].

本論文では，二つの仮定の下，勝敗の決定する構造を確率論的に捉えた新しい「強さ」の数理モデルを提案する．また，その応用の一つとして，AHP への応用を提案する．

2　Bradley-Terry モデル

n 個の要素 (チームや個人) があり，何らかの対戦を行うものとする．対戦は 1 要素対 1 要素のマッチで行われ，その結果は片方の要素の対して勝利，または敗北しか生じないとする．

何回か対戦した結果から各要素の「強さ」をはかるとする．ここで要素 i が要素 j に勝利する確率を P_{ij} としたとき，すべての組み合わせに対して，

$$P_{ij} = \frac{\pi_i}{\pi_i + \pi_j} \tag{1}$$

となる π_i を導入する．式 (1) の関係式を Bradley-Terry (BT) モデルという [2]. BT モデルにおいて π_i は，要素 i の強さを表すと考えることができる．

BT モデルは，直接の対決が無い場合にも，第三者との対戦を媒介として勝敗を決することが可能であるとされている

3　提案のモデル

3.1　強さのゆらぎ

ある二つの要素が，比較，対決を行ったとき，その勝敗結果は必ずしも一定ではない．要素の状態は時々刻々と変化し，常に一定の力を発揮できるとは限らない．これらをふまえ，提案モデルは,「強さ」が一意ではなく，対戦の度に確率変動する値であると考える．

3.2　提案モデル

提案モデルは以下の二つの仮定の元，勝敗が決定する構造を確率論的にとらえ，そのパラメータに基づく新しい「強さ」の数理モデルである．

仮定 1 要素 i は固有の「強さ」π_i を勝負にあたり発動する．勝敗はこの発動された「強さ」の多寡で決まり，値の大きい方が勝利する．

仮定 2 π_i の実現値は勝負毎に変動する確率変数であり，平均 μ_i，分散 ${\sigma_i}^2$ の正規分布とする．

これらの仮定より，要素 i が要素 j に勝利する確率 P_{ij} は式 (2) で定義できる．

$$P_{ij} = Pr\{\pi_i > \pi_j\} = Pr\{\pi_i - \pi_j > 0\} \tag{2}$$

統計量 $\pi_{ij} = \pi_i - \pi_j$ の分布は，平均 $\mu_i - \mu_j$，分散 ${\sigma_i}^2 + {\sigma_j}^2$ の正規分布となる．

3.3　強さの推定

各要素の「強さ」が，それぞれ，正規分布 $N(\mu_i, {\sigma_i}^2)$ に従うとき，任意の 2 つの要素，要素 i と要素 j の対戦における要素 i の勝利確率は，正規分布 $N(\mu_i - \mu_j, {\sigma_i}^2 + {\sigma_j}^2)$ より求めることができる．よって,「強さ」の推定は

$$\begin{aligned} \min \quad & F = \sum (P_{ij} - {P_{ij}}^*)^2 \\ & \text{ただし}, {P_{ij}}^* = f(\mu_i, {\sigma_i}^2, \mu_j, {\sigma_j}^2) \end{aligned} \tag{3}$$

となる $\mu_i, {\sigma_i}^2$ を求める多変数最適化問題と置き換えることができる．

3.4　推定の例

表 1 に平成 18 年度の四国アイランドリーグの対戦成績結果を示す．このデータを用いて提案のモデルで各要素の強さを推定した結果を表 2 に示す．推定の初期値は平均 4.5，標準偏差 2.0 とした．

表 1: 四国アイランドリーグ 対戦成績表

	香川	徳島	高知	愛媛
香川	-	22/28	13/26	16/26
徳島	6/28	-	5/28	13/27
高知	13/26	23/28	-	15/27
愛媛	10/26	14/27	12/27	-

表 2: 四国アイランドリーグ 推定結果

	香川	徳島	高知	愛媛
平均 μ_i	5.477	3.244	5.416	3.633
標準偏差 σ_i	2.244	1.689	0.662	8.185

4　AHP(階層型意思決定法)

4.1　AHP とは

AHP は意思決定問題を「目的」「評価要素」「代替案」の 3 つの要素で階層構造を構成し，意思決定を行う手法である [3]. AHP では各評価基準に対して，ウエイトを設け，そのウエイトを合成することで代替案の中から最適なものがどれかを判断する．

4.2　一対比較

ウエイトの決定方法に AHP の最大の特徴がある．AHP では評価要素を単純に 2 つずつ比べる「一対比較」を用いる．n 個の要素のうち，2 つの要素を比較し，答えに従い，1 から 9 の値を与えて $n \times n$ 行列 $A = [a_{ij}]$ を作り出す．この時，$a_{ii} = 1, a_{ji} = 1/a_{ij}$ とする．

4.3　ウエイトの算出と統合

一対比較から得られた行列 A を元にして，各階層の要素のウエイトを決定する．いま，n 個の評価項目

$I_1, I_2, \ldots, I_n$ があり，各項目のもつ本来のウエイトを $w_1, w_2, \ldots, w_n$ と仮定する．この時，項目 I_i と I_j の一対比較値 a_{ij} は，

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \tag{4}$$

という関係を満たすとする．この時，A に右からウエイトのベクトルを乗じてみると

$$\begin{bmatrix} \frac{w_1}{w_1} & \frac{w_1}{w_2} & \cdots & \frac{w_1}{w_n} \\ \frac{w_2}{w_1} & \frac{w_2}{w_2} & \cdots & \frac{w_2}{w_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{w_n}{w_1} & \frac{w_n}{w_2} & \cdots & \frac{w_n}{w_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

となる．これより，ウエイトベクトルは行列 A の固有ベクトルであり，n は最大固有値である．現実の一対比較行列 A は完全に式 (5) を満たすことは期待できないが，ほぼそれに近い形をしているとし，A の最大固有値 λ_{max} とその固有ベクトルを求め，固有ベクトルを各評価要素のウエイトとして採用する．

求めたウエイトは，一つ上の層を下層に掛け合わせ，それらを合計することで求めることができる．

4.4　ウエイトと「強さ」との互換性

AHP におけるウエイトとは，与えられたデータから算出される各要素固有の値であり，要素の強弱関係を数値化したものであると考えることができる．つまり，それぞれの要素の「強さ」であると言い換えることが可能であると考えることができる．

実際に，AHP を用いて，トーナメント戦の結果から出場選手の強さを推定した事例が存在する [1].

5　AHP への応用

5.1　BT モデルの適用

5.1.1　直接的応用

BT モデルを AHP に応用する手段として，ウエイトの算出に BT モデルを用い,「強さ」π_i を各要素のウエイトして利用する手法がある．

表 1 から強さを求め，和が 1 になるように正規化したものを表 3 に示す．この値を AHP に直接利用することができる．

表 3: 正規化された BT モデルによる推定結果

	香川	徳島	高知	愛媛
「強さ」 π_i	0.350	0.115	0.341	0.194

5.1.2　間接的応用

不完全一対比較からウエイトを算出するために，BT モデルを用いて，一対比較データを事前に推定し，ウエイトを算出する手法が提案されている [4]．欠落を含む対戦成績表から各要素の強さを推定し，式 (1) より，勝率を算出し，未知の対戦成績を推定する手法である．

表 1 の香川対愛媛の対戦成績が未知であるとしたとき，BT モデルによって強さを推定し，その結果から対戦結果を推定した．式 (6) に推定された勝率を示す．

$$\begin{aligned} P_{14} = \frac{\pi_1}{\pi_1 + \pi_4} &= \frac{73.754}{73.754 + 67.537} \\ &\simeq 0.6714 \end{aligned} \tag{6}$$

実際の対戦数の 26 を掛けると，$26 \times 0.6714 \simeq 17.46 \simeq 17$ となり，香川の勝利数を 17/26 と推定できる．

5.2　提案モデルの適用

5.2.1　直接的応用

BT モデルと同様に，提案のモデルも AHP へ応用することが可能である．AHP のウエイトを提案モデルの「強さ」の平均値 μ_i で置き換える手法である．

表 1 から強さを求め，和が 1 になるように正規化したものを表 4 に示す.

表 4: 正規化された提案手法による推定結果

	香川	徳島	高知	愛媛
平均 μ_i	0.308	0.183	0.305	0.204

5.2.2　間接的応用

不完全な対戦成績表から各要素の強さを求め，推定値を用いて未知の対戦成績を推定することが，提案モデルでも可能である．よって，BT モデル同様に，AHP への間接的な応用が可能である．

表 1 の香川対愛媛の対戦成績が未知であるとしたとき，BT モデルによって強さを推定し，その結果から対戦結果を推定した．式 (7) に推定された勝率を示す.

$$\begin{aligned} P_{14} = \Phi_{z_{14}} &= \Phi\left(\frac{\mu_1 - \mu_4}{\sqrt{{S_1}^2 + {S_4}^2}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{5.421 - 3.687}{\sqrt{2.174^2 + 12.30^2}}\right) \\ &\simeq 0.555 \end{aligned} \tag{7}$$

実際の対戦数の 26 を掛けると，$26 \times 0.555 \simeq 14.43 \simeq 14$ となり，香川の勝利数を 14/26 と推定できる．

6　結論

本論文では勝敗が決定する構造を確率論的に捉えた新しい「強さ」の数理モデルについて提案した．また，実際のスポーツのデータを元にした強さの推定を行い，モデルを検証した．更に，提案モデルの他の分野への応用として AHP への応用を提案した．

参考文献

[1] 木下栄造，“AHP を用いた柔道選手の「強さ」の推定”, オペレーションズ・リサーチ， Vol.51， No.6 ，pp. 352–356，2006.

[2] R.A.Bradley，M.E.Terry，“Rank analysis of incomplete block designs : the method of paired comparisons,”，Biometrika，Vol.39， pp. 324–345，1952

[3] T.L.Saaty，「The Analytic Hierarchy Process」，McGraw-Hill，1980.

[4] S.Nishimoto，H.Yamauchi，A.Kanagawa，“An Analytic Hierarchy Process with incomplete pairwise comparison data,” Proceedings of the Eighth International Conference on Industrial Management，pp. 1168–1172，2006