平成16年度　　　　特 別 研 究 発 表 要 旨
教育研究分野　情報数理学　　　学籍番号　2113005　　氏名　磯谷貴史

先行順序を満たす順列を表現するPQ-tree

1　はじめに

問題の解が順列で与えられるものの中には，あらかじめ与えられた「先行順序を満たすもの」という条件が加わることが多々ある．本研究では，K.S.Booth が開発した順列の集合を表現する PQ-tree に「あらかじめ与えられた幾つかの要素間に順列の中で現われる順番に制約がある」という条件が加わった場合に，PQ-tree の表す順列の集合の中にこの条件を満たす順列が存在するかを判定するアルゴリズムを提案する．

2　PQ-tree

PQ-tree は，P-node と Q-node で構成されている順列を表現する木構造である．P-node と Q-node を図 1 に示す．P-node の表現する順列は子を任意に入れ替えてできる $k!$ 通りの順列である．Q-node の表現する順列は，子を右からと左から読んだ 2 通りである．PQ-tree で表現できる順列の集合は，集合 U と U の部分集合 $S_1, S_2, \cdots, S_m$ が与えられたとき，U の要素でできる順列の中で「各 S_i に属している要素は相連続している」という条件を満たす順列の集合である．もちろん任意の順列の集合に対してそれを表現する PQ-tree があるとは限らない．存在しなければ空木となる．部分集合 S が与えられたとき，$|U| = n$ とすると $O(n)$ で S の要素が連続するように PQ-tree を生成するアルゴリズムが存在する．[1]

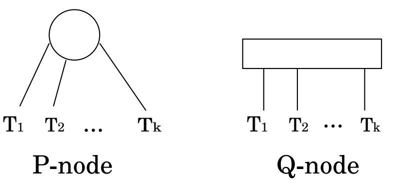

図 1: P-node と Q-node.

3　先行順序

順列の中で a_i が a_j よりも先に現れなければならないという条件を先行順序と呼び $a_i \to a_j$ と書く．あらかじめ与えられる制約条件の集合を先行制約の集合と呼んで，$C = \{a_i \to a_j\}$ で表す．また，$d_1, d_2, \cdots, d_k$ が存在して，$a \to d_1, d_1 \to d_2, \cdots, d_k \to b$ となっているとき $a \xrightarrow{*} b$ と表す．C に現れる先行順序の U の要素を頂点，$a_i \to a_j$ に対応して，辺 (a_i, a_j) を持つ有向グラフを G_c とする．有向グラフ $G = (V, E)$ および G の頂点の部分集合 S が与えられたとき，S に属する頂点をひとまとめにして 1 つの頂点にして得られるグラフを縮約グラフという．

4　先行制約を満たす順列を表現する PQ-tree 生成アルゴリズム

Booth の PQ-tree 生成アルゴリズムの中心となっている操作は 9 個の template による PQ-tree の変形規則を用いることである．本研究で作成したアルゴリズムは 9 個の template を先行制約を満たすように作り直すことによって得られた．9 個の template の 1 つ P2（図 2）を例にする．どの template に対しても pattern においては先行制約は満たされているとする．

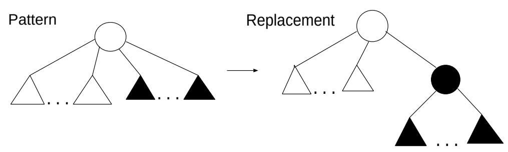

図 2: template P2.

この replacement において，先行制約を満たさなくなる場合の原因は，replacement において full からなる pattern の要素をひとまとめにすることである．full となる要素を図では黒で示す．先行制約を満たさなくなるのは，replacement における full の P-node を根とする subtree に属する葉である U の要素の集合を S_{P2} とするとき，S_{P2} に 2 つの異なる要素 a および b が存在し，かつ他の subtree に属する葉の要素 c が存在して，$a \xrightarrow{*} c$ かつ，$c \xrightarrow{*} b$ となっているときであり，かつその時だけである．そのような a, b, c が存在しない必要十分条件を次の補題にまとめる．

補題　　Template P2 においてこの PQ-tree の変換を行った後，PQ-tree が先行制約を満たす順列を持たなくなるための必要十分条件は T_c において S_{P2} による縮約グラフが閉路を持たないことである．

補題を用いて先行制約を満たす順列が存在するかを判定する．

縮約では辺をつなぎ換えていくため，辺の数すなわち $|C|$ の回数の操作でできる．よって，$O(|C|)$ の時間計算量で判定できる．

このように 9 個の template に対して先行制約を満たすように template を作り直していく．提案のアルゴリズムは Booth のアルゴリズムにおける template を上記のように変えただけで，他の部分は変更せずに所望の PQ-tree 表現が行われることを確かめている．

U の要素数を n，先行制約 C の数を k とすると，次の定理が成り立つ．

定理　先行制約を満たす順列が存在する PQ-tree 生成アルゴリズムは $O(kn)$ の時間計算量で実行できる．

5　おわりに

本研究では先行制約を満たす順列が存在する PQ-tree 生成アルゴリズムを提案した．順序関係のある NP-完全な問題に応用し，有効なアルゴリズムを開発していくことが今後の課題である．

参考文献

[1] K.S.Booth and G.S.Lueker，”Testing for consecutive ones property,”interval graphs, and graph planarity using PQ-tree algorithms, J.Computer and System Sciences，1976